Unidad I

Combinatoria

1.1. Cuenta y ordenamiento.

En el aprendizaje de las matemáticas se suelen observar problemas debido a que los conceptos involucrados resultan a menudo complejos por su alto nivel de abstracción. Se han detectado problemas en el aprendizaje de los conceptos asociados al te-ma de- conte-o. Dos conce-p-tos básicos de- conte-o son la ordenación y la combinación.

En este trabajo se diseña y analiza una p-rop-ue-sta didáctica para el aprendizaje-de- las orde-nacione-s y combinaciones apoyada en la teoría apoe. Se presenta dicho análisis y los re-sultados obte-nidos a p-artir de-l trabajo de- los e-studiante-s con la propuesta realizada.

Palabras clave: combinatoria, teoría apoe, experimento en aula, ordenacione-s, combinaciones, álgebra.

1.2. Permutaciones.

Ordenar *n* objetos es equivalente a tomar una caja con *n*compartimentos y poner cada elemento en un compartimento en algún orden específico.

1	2	3	.	.	.	*n*

Existen 4 casos posibles de permutaciones:

Si analizamos la caja con *n* compartimentos, observamos que la primer casilla se puede llenar de *n* formas diferentes, la segunda de (*n-1*) formas, la tercera de (*n-2*) formas, . . . , y la última casilla de sólo una forma. Aplicando el principio de multiplicación vemos que la caja se puede llenar de:

$$n\ (n-1)\ (n-2)\ .\ .\ .\ 1 = n! \quad \text{formas diferentes.}$$

Si representamos con P_n^n *el número de permutaciones cuando se toman todos los n elementos a la vez, entonces* $P_n^n = n!$.

En este momento es conveniente recordar, para que haya mayor claridad, que el producto de los enteros positivos desde uno hasta *n* se denota con el símbolo *n!* y se lee "*n* factorial". Así mismo, que por definición 0! = 1.

Ejemplo 2. 7. 4! = (4)(3)(2)(1) = 24

$$\frac{6!}{4!} = \frac{(6)(5)(4!)}{4!} = (6)(5) = 30$$

Ejemplo 2. 8. Si se tienen 5 tarjetas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 ¿De cuántas formas diferentes pueden ordenarse las 5 tarjetas?.

Solución

Como las 5 tarjetas son diferentes y se tomen todas a la vez, entonces P_5^5 = 5! = 120.

Ejemplo 2. 9. Si se tiene una obra literaria de 3 libros ¿De cuántas formas pueden acomodarse los libros en un librero?

Solución

Dado que se tienen tres libros diferentes y se toman los tres a la vez, entonces hay P_3^3 = 3! = 6 formas de acomodar los libros en el librero.

1.3. Palabras.

las palabras reservadas, son palabras definidas en Java, que NO se pueden utilizar como nombres en variables, clases o métodos. True, false y null tampoco pueden ser utilizadas, y junto con la sintaxis de los operadores y separadores, forman la definición del lenguaje.

1.4. Conjuntos.

Uno de lo resultados más importantes acerca de conjuntos es que bajo las operaciones de unión, intersección y complemento se satisfacen ciertas leyes algebraicas a partir de la cuales podemos desarrollar un álgebra de conjuntos. El álgebra de conjuntos es un ejemplo de una estructura conocida como un álgebra de ***Boole***; otro ejemplo es el álgebra de la lógica, donde $\vee, \wedge, \neg$ son las operaciones que actúan sobre proposiciones.

En esta sección trataremos las leyes básicas del álgebra de conjuntos.

Teorema 1.4.*1* *Si* A y B *son conjuntos*, *entonces*

(*i*) $A \subseteq A \cup B$

(*ii*) $B \subseteq A \cup B$

Demostración:

(*i*) Para demostrar que $A \subseteq A \cup B$ debemos mostrar que $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$.

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$[6]

$\Rightarrow x \in A \cup B$.*Definición de* $\cup$

(*ii*) Para demostrar que $A \cap B \subseteq A$ debemos mostrar que $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ *Definición de* $\cap$

$\Rightarrow x \in A$[7]

Teorema 1.4.2 *Si*A y B *son conjuntos*, *entonces*

(*i*) $A \cap B \subseteq A$

(*ii*) $A \cap B \subseteq B$

Ejercicio: Demostrar el teorema anterior.

Teorema 1.4.3 *Si*A y B *son conjuntos*, *entonces*

(*i*) $A \subseteq B$ *si y solamente si* $A \cup B = B$

(*ii*) $A \subseteq B$ *si y solamente si* $A \cap B = A$

Demostración:

(*i*) Hay que demostrar dos implicaciones: 8

$(a)\ \ A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
$(b)\ A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

- Supongamos que $A \subseteq B$. Para demostrar la igualdad $A \cup B = B$ debemos mostrar las dos contenencias:

  (a.1) $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ *Definición**U**.*

$\Rightarrow x \in B \vee x \in B$ *hipótesis*

$\Rightarrow x \in B$ 9

(a.2) Es verdadera por el teorema (1.4.4.*i i*).

- Supongamos que $A \cup B = B$

$A \subseteq A \cup B$ por el teorema (1.4.4.*i*).

De esta forma, reemplazando $A \cup B$ por *B* por la contenencia anterior obtenemos:

$$A \subseteq B.$$

Ejercicio: Demostrar la parte (*i i)* del teorema anterior.

Teorema 1.4.4 Leyes de absorción *Para cualesquier conjuntos A y B,*

(*i*) $(A \cap B) \cup A = A$.

(*i i)* $(A \cup B) \cap A = A$.

Demostración:

(*i*) $A \cap B \subseteq A$ *teorema (1.4.2.i)*

Por lo tanto,

$(A \cap B) \cup A = A$ *teorema (1.4.3.i)*

Ejercicio: Demostrar la parte (*i i)* del teorema anterior.

Teorema 1.4.4 Leyes de absorción *Para cualesquier conjuntos A, B y C, se cumple lo siguiente:*

(*i*) *Leyes conmutativas*

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(i i)Leyes asociativas

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(i i i) Leyes distributivas

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(i v) leyes idempotencia

(a) $A \cup A = A$

(b) $A \cap A = A$

(v) leyes deidentidad

(a) $A \cup \varnothing = A$

(b) $A \cap U = A$

(c) $A \cup U = U$

(d) $A \cap \varnothing = A$

(v i) leyes decomplemento

(a) $A \cup A' = U$

(b) $A \cap A' = \varnothing$

(c) $U' = \varnothing$

(d) $\varnothing' = U$

(e) $(A')' = A$

(v i i) leyes de Morgan

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración:

(i i i.a) hay que demostrar las dos contenencias:

(1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

(1) $x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$ *Definición de* $\cup$

$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$ *Definición de* $\cap$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$[10]

$\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$ *Definición de* $\cup$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap x \in (A \cup C)$ *Definición de* $\cap$

(2) $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$ *Definición de* $\cap$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ *Definición de* $\cup$

$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$[11]

$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$ *Definición de* $\cap$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$ *Definición de* $\cup$

Ejercicio: Demostrar las demás partes del teorema anterior.

Usando las leyes del álgebra de conjuntos que hemos desarrollado anteriormente, podemos probar todas las propiedades elementales sobre conjuntos sin referirnos a las definiciones de lo símbolos $\cup, \cap, '$, y $\subseteq$. El siguiente es un ejemplo de como tales pruebas se pueden realizar.

Ejemplo:

- Demostrar $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap B') &= A \cap (B \cup B') && \textit{ley distributiva} \\
&= A \cap U && \textit{ley del complemento} \\
&= A && \textit{ley de identidad}
\end{aligned}
$$

- Demostrar $Si\ A \cup B,\ entonces\ A' \subseteq B$

$$
\begin{aligned}
&U \cap A' = A' && \textit{ley de identidad} \\
&(A \cup B) \cap A' = A' && \textit{Sustituyendo } U \textit{ por } A \cup B \\
&A' \cap (A \cup B) = A' && \textit{ley conmutativa} \\
&(A' \cap A) \cup (A' \cap B) = A' && \textit{ley distributiva} \\
&\varnothing \cup (A' \cap B) = A' && \textit{ley del complemento} \\
&A' \cap B = A' && \textit{ley de identidad} \\
&A' \subseteq B && \textit{teorema}(1.4.3.ii)
\end{aligned}
$$